Quatrième partie:
Forces, travail et énergie

Notions abordées:

- 4.1 Différent types de forces
- 4.2 Impulsion et quantité de mouvement
- 4.3 Travail d'une force et théorème de l'énergie cinétique
- 4.4 Forces conservatives et énergie potentielle
- 4.5 Théorème de l'énergie
- 4.6 Equilibre et petites oscillations

Buts:

- Comprendre les notions de force conservative et d'énergie potentielle
- Maitriser ces nouvelles notions permettant une résolution des problèmes plus rapide en certain cas

4.1 Types de forces

Force de pesanteur (poids): $\vec{F} = m\vec{g}$ avec $\vec{g}$ l'accélération de gravitée terrestre

Force de rappelle: $\vec{F} = -k\vec{x}$ (loi de Hooke)

Force de liaison: force perpendiculaire au support forcent le point matériel à rester sur le support

Force de Lorentz: $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B}$ force exercée par un champ électromagnétique sur une particule de charge q se déplacent avec vitesse $\vec{v}$

Gravitation entre deux masses: $\vec{F} = G\,\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}$ avec $G = 6.674 \times 10^{-11}\ \mathrm{m}^3\ \mathrm{kg}^{-1}\ \mathrm{s}^{-2}$ la constante de gravitation universelle

4.1 Forces de frottement (ou friction)

- Forces exercées sur un corps par:
  - le fluide (gaz ou liquide) dans lequel il se déplace
  - tout autre corps avec lequel il est en contact et par rapport auquel il se déplace

- Ces forces s'opposent au mouvement du corps:

$$\vec{F}_{\text{frot}} = -f(v)\hat{v}, \quad f(v) > 0$$

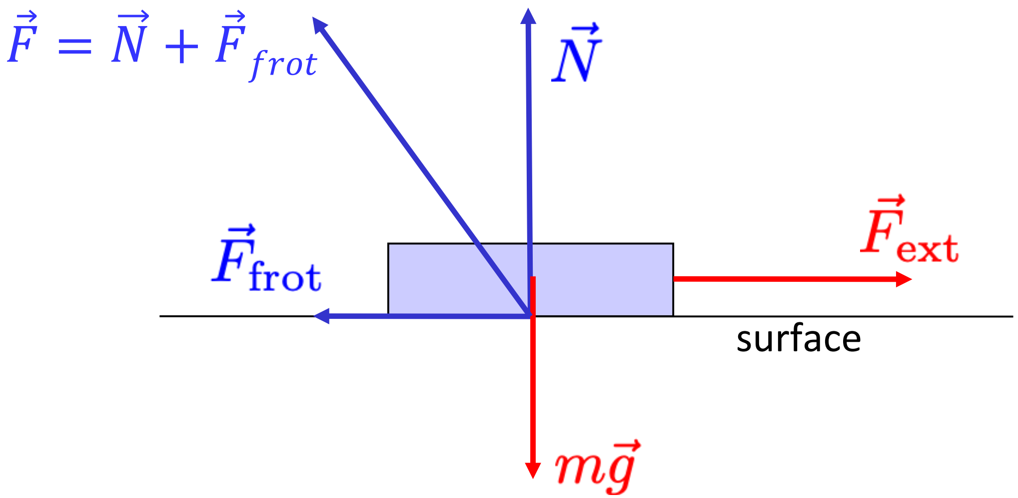
- Elles résultent d'un grand nombre de phénomènes microscopiques modélisés par un effet moyen:
  - Exemple: frottement de l'air sur un avion
    - A priori on devrait pouvoir décrire cette situation comme une succession d'un grand nombre de « chocs » entre l'avion et les molécules d'air …
    - … mais ceci supposerait qu'on puisse déterminer les trajectoires de toutes les molécules d'air, ce qui est irréaliste
  - Exemple: multitude de points des contacts entre deux surfaces

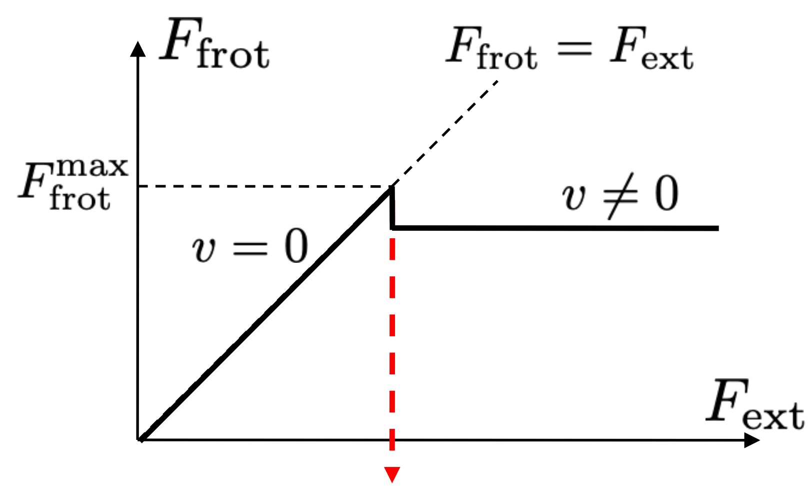
- On décrit donc les forces de frottement par des **lois empiriques**:
  - Tirées de l'expérience
  - Non fondamentales
  - Approximatives et dont l'applicabilité dépend des cas

4.1 Forces de frottement sec

démo: mesure force de frottement 69

- Force de contact $\vec{F}$ exercée par une surface sur un solide :
  - composante normale à la surface N = force de liaison
  - composante tangente à la surface F_{frot} = force de frottement sec





Force d'arrachement:
imminence de glissement

- Il faut distinguer deux cas:

Lois de Coulomb

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{si } v = 0: \quad F_{\text{frot}} \leq F_{\text{frot}}^{\text{max}} = \mu_s N \\ &\text{si } v \neq 0: \quad \vec{F}_{\text{frot}} = -\mu_c N \frac{\vec{v}}{v} \end{aligned}}$$

μ_s = coefficient de frottement statique

μ_c = coefficient de frottement cinétique

4.1 Coefficients de frottement

Exemples (valeurs indicatives)

Corps en contact	μ_S	μ_C
Acier sur acier (sec)	0.78	0.42
Acier sur acier (gras)	0.10	0.05
Acier sur acier (surfaces polies)	100	100
Bois sur bois	0.5	0.3
Métal sur glace	0.03	0.01
Pneu sur route sèche	0.8	0.6
Pneu sur route mouillée	0.15	0.1
Téflon sur téflon	0.04	0.04
Cuir sur fonte	0.28	0.56

En règle générale :

$$\mu_{\mathbf{c}} < \mu_{\mathbf{s}}$$

4.1 Forces de frottement sec

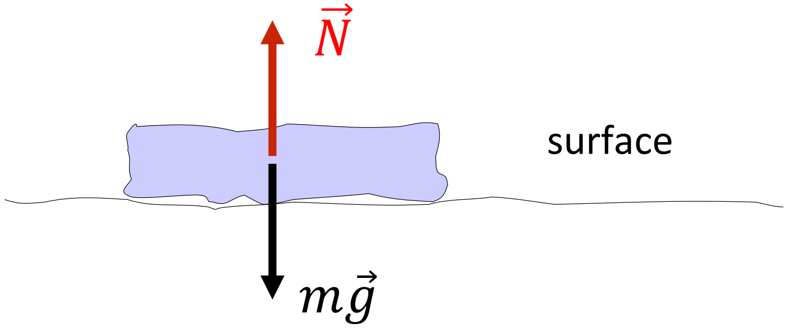
- Ne dépendent pas (en première approximation):
  - de la vitesse
  - de la dimension de la surface de contact

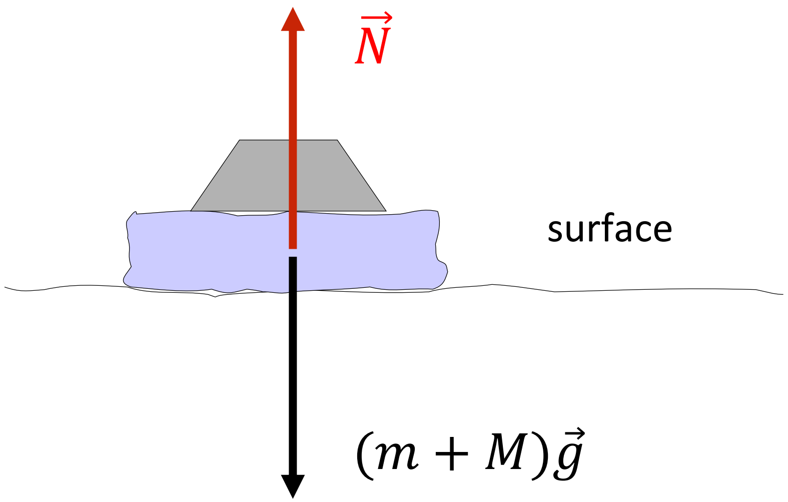
    Surface pas parfaitement plane

    Vrai surface de contact proportionnelle à la charge

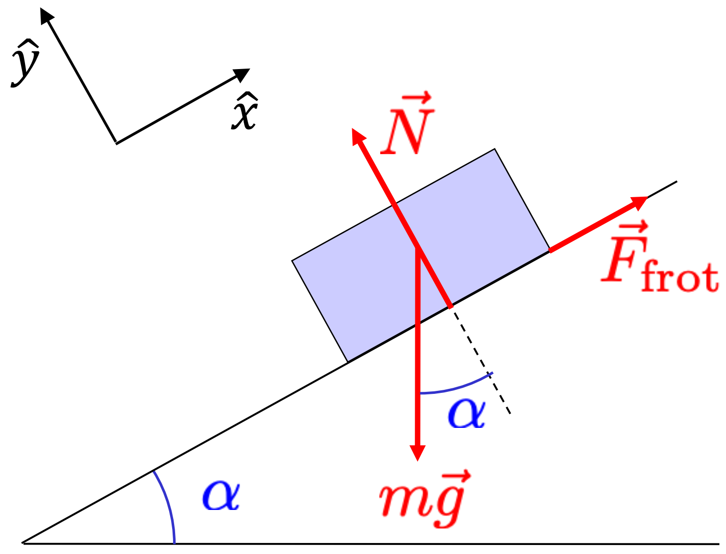
$\Rightarrow$ Forces de frottements proportionelles à la force de liason N

- Dependent:
  - Nature de corps en contact
  - Etat des surfaces
  - Temperature





4.1 Ex.: solide sur plan incliné



- Cas statique:

$$\vec{N} + \vec{F}_{\text{frot}} + m\vec{g} = \vec{0}$$

$$\alpha_{\text{s}} = \text{angle } \alpha \text{ tel que } \; F_{\text{frot}} = F_{\text{frot}}^{\text{max}} = \mu_{\text{s}} N$$

(début glissement)

$$\begin{cases} \mu_{\text{s}} N & = mg \sin \alpha_{\text{s}} \\ N & = mg \cos \alpha_{\text{s}} \end{cases} \Rightarrow \mu_{\text{s}} = \tan \alpha_{\text{s}}$$

- Cas dynamique (glissement):

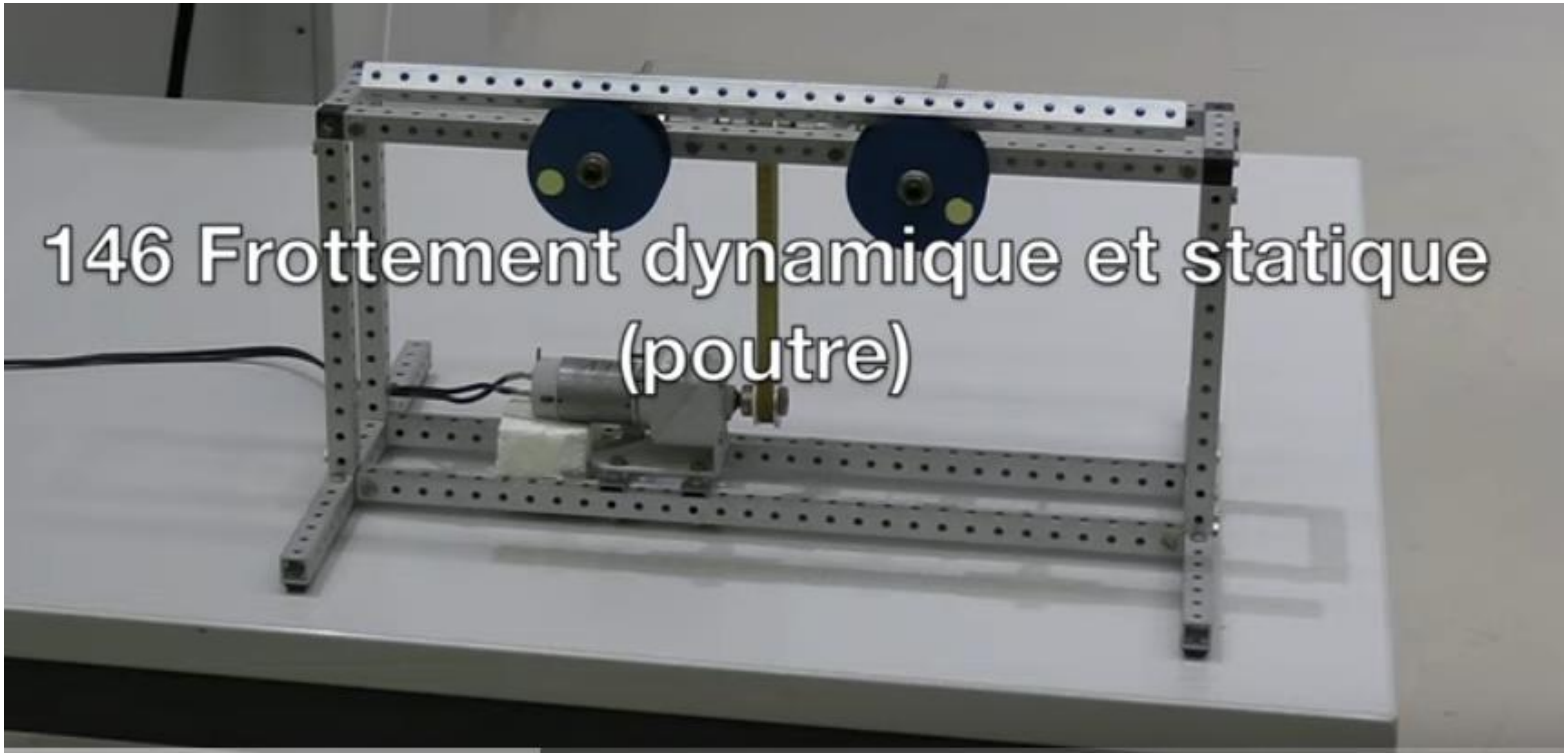
$$\alpha_{\text{c}} = \text{angle } \alpha \text{ tel que } \vec{v} = \text{constante}$$

$$\mu_{\text{c}} = \tan \alpha_{\text{c}}$$

Une fois commencée à glisser, la masse *m* continue le mouvement même si $\alpha_c < \alpha_S$

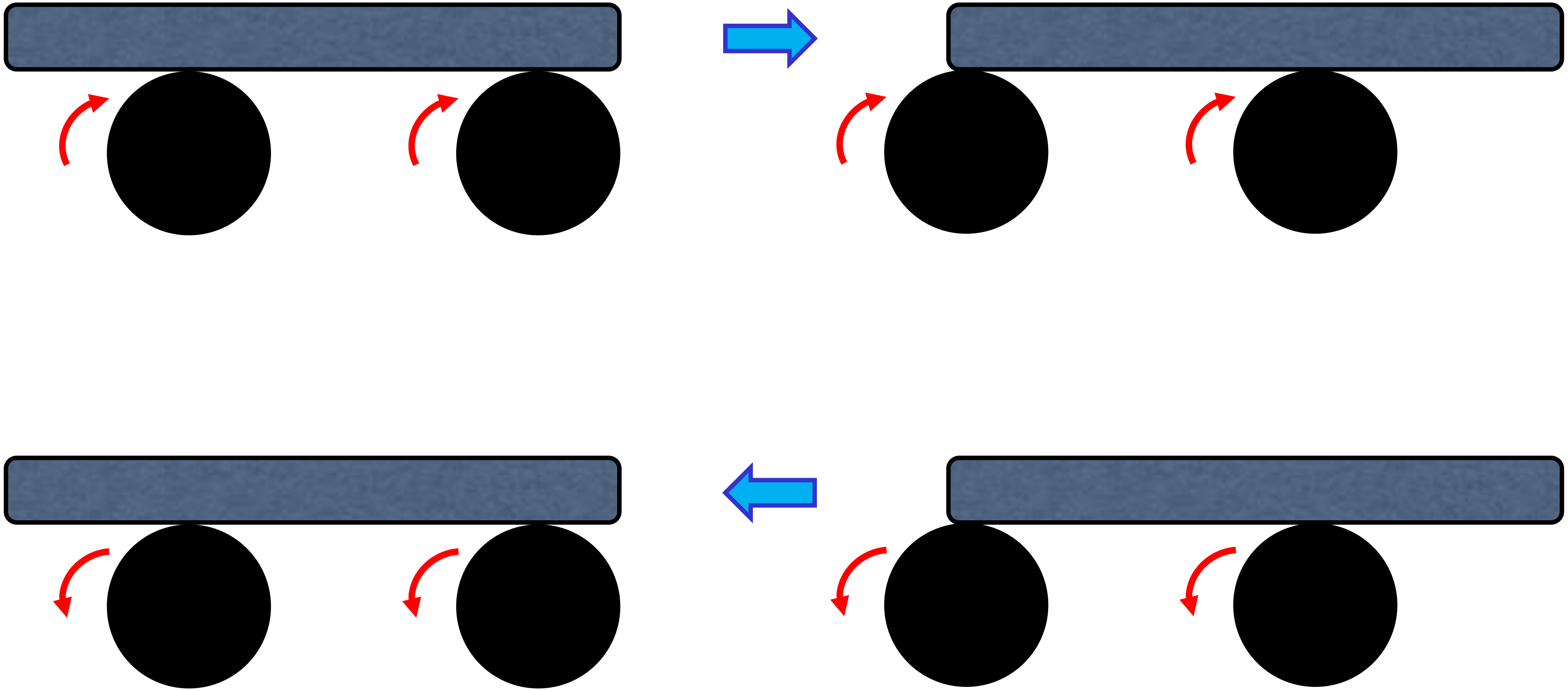
démo: frottement sur plan incliné 63; https://auditoires-physique.epfl.ch/experiment/146

4.1 Coefficients de frottement

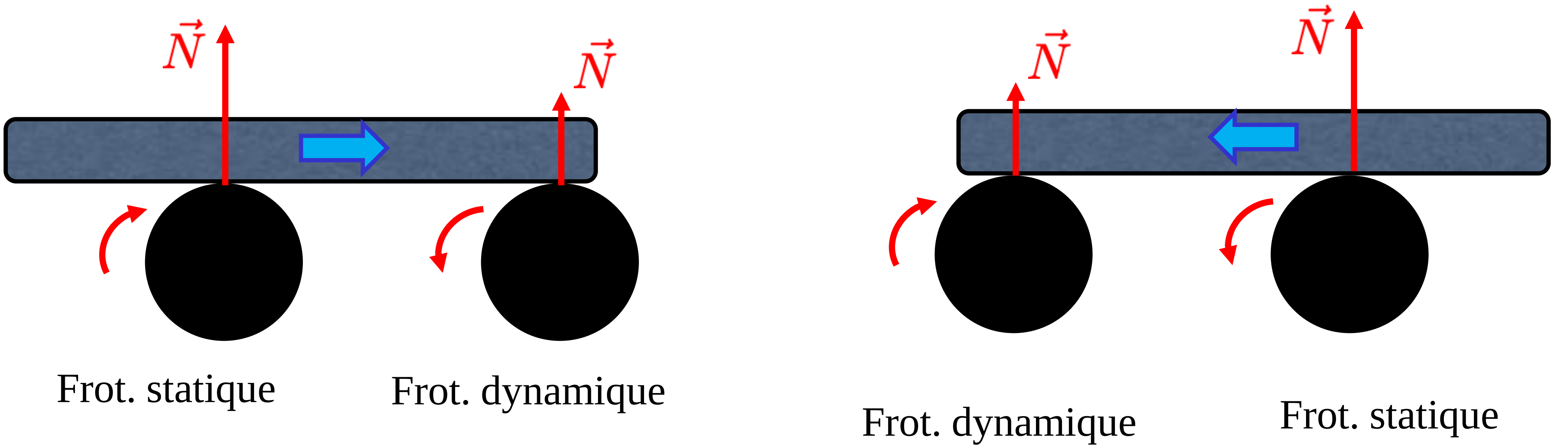


4.1 ex. frottement statique

Frottement statique (roulement sans glissement) aux 2 points de contact entre poutre et roues



4.1 frottement statique et dynamique



Frottement statique pour le point de contact qui supporte la majorité du poids de la barre

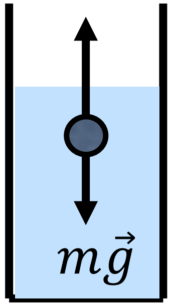
Frottement dynamique pour le point de contact qui supporte une petite portion de la barre

Si la barre se trouve exactement entre les deux disques, alors celle-ci subira des forces de frottements dynamiques de la part de chacun des disques, elle restera alors immobile (mais ceci est un équilibre instable).

4.1 Forces exercées par un fluide

$\vec{F}_{Arc} = -M\vec{g}$

Poussée d'Archimède $\vec{F}_{Arc}$: un corps plongé dans un fluide est soumis de la part du fluide à une force opposée à celle à laquelle serait soumis un objet de même volume rempli de fluide



M est la masse du fluide déplacé

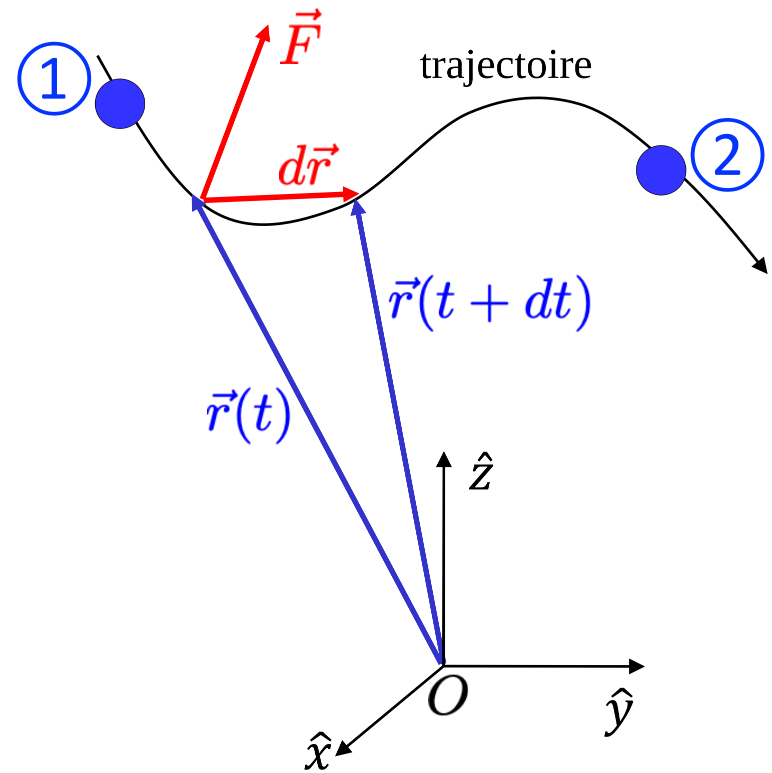
Si la densitée de l'objet est inferieure à la densitée du fluide, l'objet flotte

Frottement dans un fluide :

- Régime laminaire (vitesse pas trop grande) $\vec{F}_{frot} = -b_l\vec{v}$
- Régime turbulent (vitesse grande) $\vec{F}_{frot} = -b_t v^2 \frac{\vec{v}}{v}$

4.2 Impulsion et quantité de mouvement

- Point matériel de masse m (constante) soumis à la force $\vec{F}$ entre les points ① et ②



$$\vec{F} = m\,\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

où on définit $\boxed{\vec{p} = m\,\vec{v}}$ **Quantité de mouvement**

Unité de mesure: kg m/s

- Intégration de $\vec{F} = m\,\vec{a}$ par rapport au temps:

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\vec{p}}{dt}dt = \int_1^2 d\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$$

- Définition:

$$d\vec{I} = \vec{F}dt \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{I}_{12} = \int_1^2 d\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,dt = \vec{p}_2 - \vec{p}_1}$$

Impulsion de la force $\vec{F}$

(entre les temps t_1 et t_2)

$$\boxed{\vec{F}dt = d\vec{p}}$$

2ème loi de Newton (équivalente à $\vec{F} = m\,\vec{a}$)

La variation de la quantité de mouvement est égale à l'impulsion de la somme des forces

4.2 Ex.: balle de tennis

Jannik Sinner fait un service a 216 km/h. Depuis quelle hauteur je devrais laisser tomber la balle de tennis pour que l'impulsion exercée par la force de pesanteur pendant la chute soit identique à l'impulsion imprimé par Jannik avec la raquette de tennis?

On indique avec v_0=216 km/h = 60 m/s la vitesse de la balle de tennis (initialement à repos) à l'instant où la balle parte de la raquette de tennis.
On ne connait ni la force appliquée par Jannik ni le temps de frappe

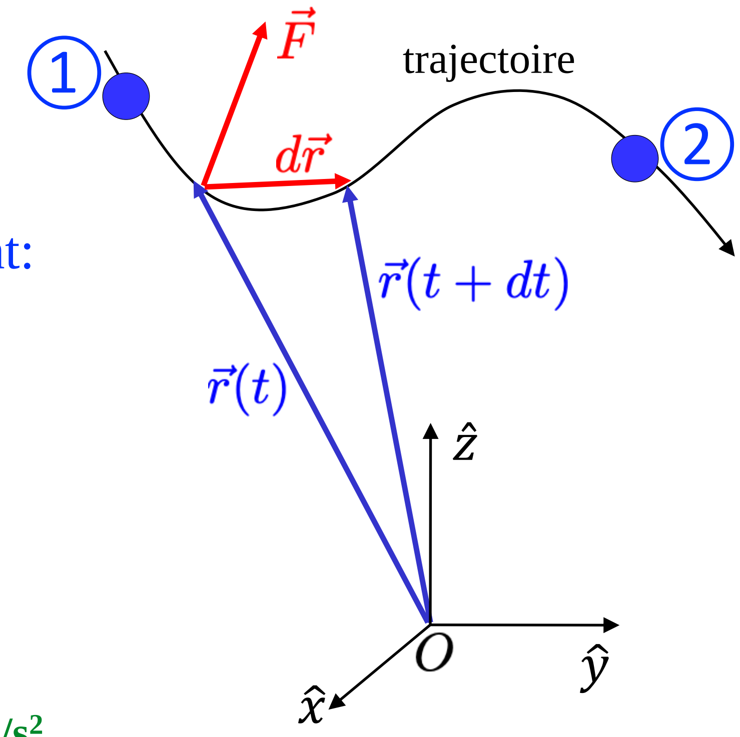
$$\vec{I}_{raquette} = \int_0^{\Delta t_{frappe}} \vec{F}\, dt = \vec{p}_{frappe} - \vec{p}_0 = mv_0 - 0 = mv_0$$

$$\vec{I}_{mg} = \int_0^{t_{chute}} m\vec{g}\, dt = mgt_{chute} = \vec{p}_{chute} - \vec{p}_0 = mv_0 \qquad \Rightarrow \qquad t_{chute} = \frac{v_0}{g}$$

$$h_{chute} = \frac{1}{2} g t_{chute}^2 = \frac{1}{2} g \frac{v_0^2}{g^2} = \frac{v_0^2}{2g} \approx 180\ m$$

4.3 Travail et énergie cinétique

- Point matériel de masse m (constante) soumis à la force $\vec{F}$ entre les points ① et ②



- Intégration de $\vec{F} = m\,\vec{a}$ par rapport au vecteur déplacement:

$$\int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_1^2 \frac{d\vec{p}}{dt}\cdot d\vec{r} = \int_1^2 m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v}dt$$

$$= \int_1^2 \frac{1}{2}m\frac{d(\vec{v}\cdot\vec{v})}{dt}dt = \int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt = K_2 - K_1$$

où on définit $\boxed{K = \frac{1}{2}mv^2}$

Energie cinétique
Unité de mesure: J (Joule) = kg m²/s²

- Définition:

$$dW = \vec{F}\cdot d\vec{r} \Rightarrow \boxed{W_{12} = \int_1^2 dW = \int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{r}}$$

Travail de la force $\vec{F}$
Unité de mesure: J (joule) = Nm = kg m²/s²

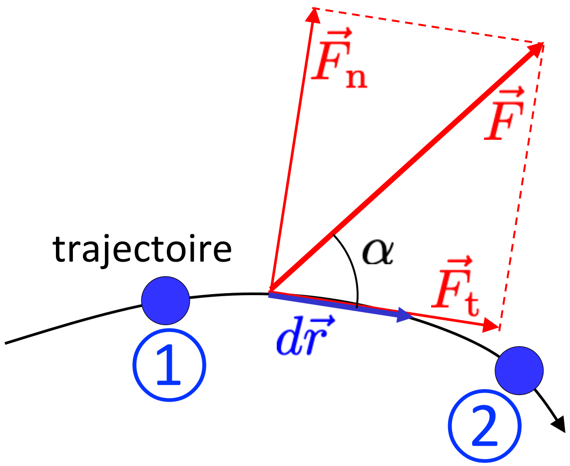
$$\boxed{W_{12} = \int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{r} = K_2 - K_1}$$

***Théorème de l'énergie cinétique*:**
La variation de l'énergie cinétique est égale au travail de la somme des forces

4.3 Travail: interpretation

$$W_{12} = \int_1^2 dW = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_1^2 F \cos\alpha \, ds = \int_1^2 F_t ds$$

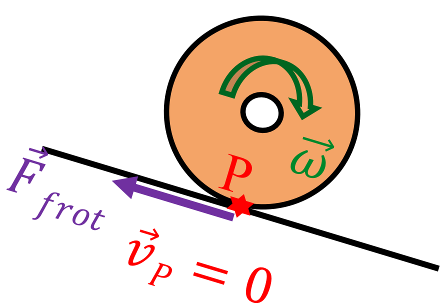
$$\begin{aligned} \textstyle\int_1^2 \ldots \quad &= \text{intégrale curviligne le long de la trajectoire} \\ s \quad &= \text{abscisse curviligne le long de la trajectoire} \\ ds \quad &= |d\vec{r}| \end{aligned}$$

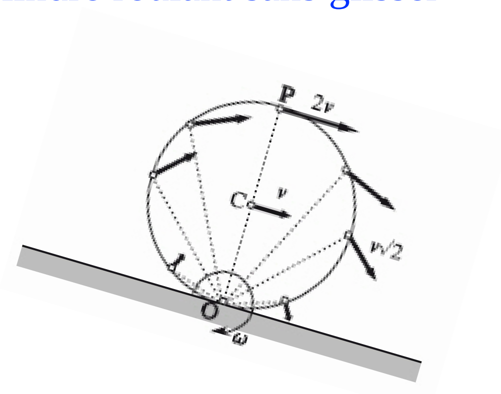


- Seule la composante de $\vec{F}$ tangente à la trajectoire ($\vec{F}_\text{t}$) travaille
  - la force centripète du mouvement circulaire uniforme ne travaille pas,
  - les forces de liaison (perpendiculaires au déplacement) ne travaillent pas

- Le travail W a le signe de la projection de $\vec{F}$ sur la direction de mouvement:
  - le travail d'une force de frottement sec vaut $W_{12} = -\mu_c N(s_2 - s_1) < 0$

- Une force dont le point d'application est immobile ne travaille pas:
  - force de frottement sur un cylindre roulant sans glisser





A chaque instant, il y a une rotation autour du point de contact, qui est immobile ($ds = 0$, $v_P = 0$).

$$\int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_1^2 \vec{F} \cdot \vec{v} \, dt = 0$$

4.3 Puissance d'une force

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F}\cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Puissance instantanée d'une force
Unité de mesure: W (Watt) = J/s = kg m^2/s^3

- Pour un point matériel :

$$K_2 - K_1 = W_{12} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dK}{dt} = P = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Le taux de variation de l'énergie cinétique est égale à la puissance de la somme des forces

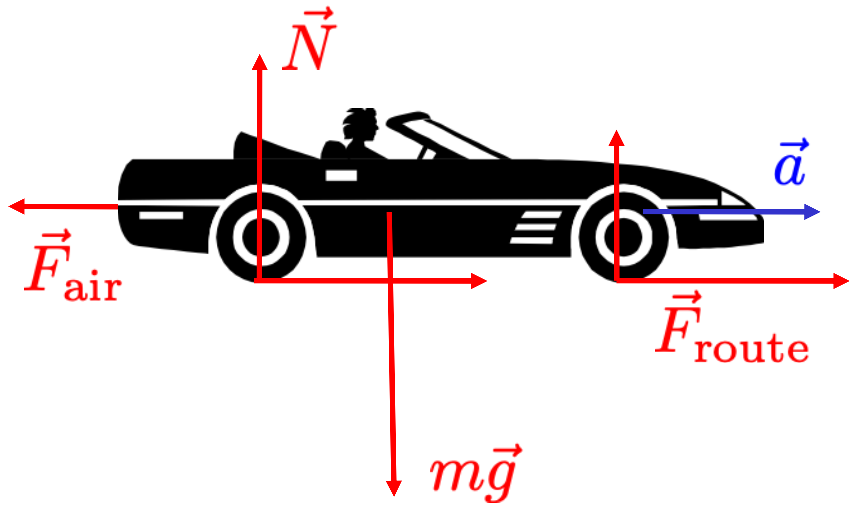
- Pour un système de points matériels :
  - en appliquant le théorème de l'énergie cinétique à chaque point matériel du système, on obtient

$$K_2^{\text{tot}} - K_1^{\text{tot}} = W_{12}^{\text{tot,ext}} + W_{12}^{\text{tot,int}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dK^{\text{tot}}}{dt} = P^{\text{tot,ext}} + P^{\text{tot,int}}$$

  - Attention : les forces internes au système ne peuvent pas être ignorées, car elles peuvent travailler !
  - Note: dans le cas d'un solide, les forces internes ont un travail total nul (voir système de points matériels)

4.3 Ex.: Voiture en accélération

- Forces extérieures s'exerçant sur la voiture:
  - poids mg
  - réaction du sol N
  - frottements de la route sur les roues F_{route}
  - frottement de l'air sur la carrosserie F_{air}



- 2ème loi de Newton:

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{route}} + \vec{F}_{\text{air}} = m\vec{a} \Rightarrow \begin{cases} N & = mg \\ ma & = F_{\text{route}} - F_{\text{air}} \end{cases}$$

F_{route} est responsable de l'accélération mais pas du gain en énergie cinétique !

- Travail et énergie cinétique:
  - F_{route} ne travaille pas (roulement sans glissement)
  - aucune force extérieure ne travaille sauf F_{air}
  - le travail de F_{air} est négatif et cause une diminution d'énergie cinétique
  - mais l'énergie cinétique augmente …
    $\Rightarrow$ il y a des forces internes dont le travail est positif !

$$\frac{dK^{\text{voiture}}}{dt} = \underbrace{P^{\text{tot,ext}}}_{<0} + P^{\text{tot,int}} > 0$$

4.4 Forces conservatives

- Une force est dite conservative si son travail entre deux points ne dépend pas du chemin suivi (mais uniquement de la position des deux points)

- Une telle force $\vec{F}$ dérive d'une énergie potentiel $V(\vec{r}\,)$ tel que:

$$\vec{F} = -\begin{pmatrix} \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial x} \\ \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial y} \\ \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial z} \end{pmatrix} = -\vec{\nabla} V(\vec{r})$$

$\vec{\nabla}$ est le gradient

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix}$$

La variation infinitésimale de $f(\vec{r})$ est:

$$df(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = \vec{\nabla} f(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

- Dans ce cas, on a:

$$W_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_1^2 -\begin{pmatrix} \partial V/\partial x \\ \partial V/\partial y \\ \partial V/\partial z \end{pmatrix} \cdot d\vec{r} = -\int_1^2 dV(\vec{r}) = V(\vec{r}_1) - V(\vec{r}_2) = K_2 - K_1$$

donc: $V(\vec{r}_1) + K_1 = V(\vec{r}_2) + K_2$

Théorème de l'énergie mécanique:
Pour des forces conservatives, l'énergie mécanique E (énergie cinétique + énergie potentielle) est conservée

$$E = K + V(\vec{r}) = \text{ constante}$$

4.4 ex. Force de pesanteur

Quiz

A partir de la même hauteur, deux balles identiques sont laissées libres de rouler sur deux pentes de différentes inclinaisons. La quelle des deux balles tombe plus loin dans le bac?

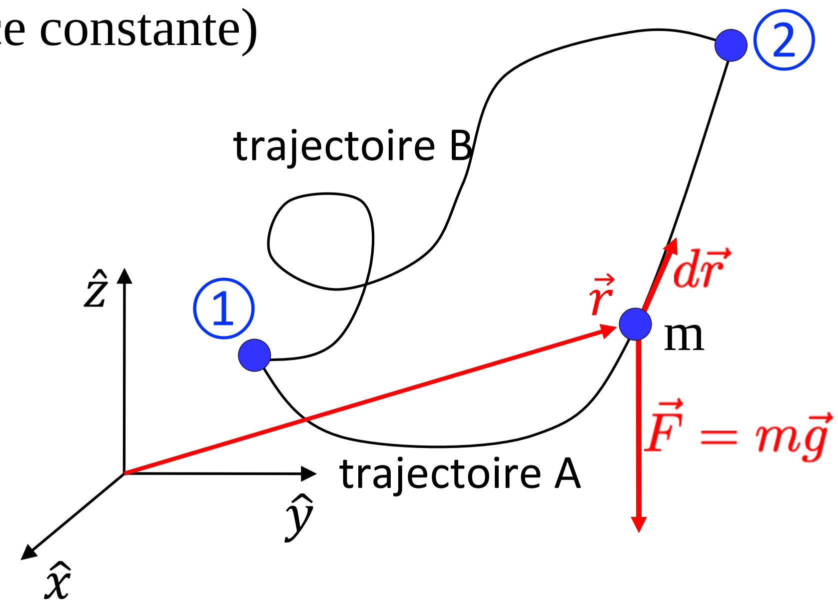
1) La verte
2) La rouge
3) Identique

4.4 Ex.: travail de la force de pesanteur

(ou, plus généralement, d'une force constante)

$$W_{12} = \int_1^2 m\vec{g}\cdot d\vec{r} = \int_1^2 -mg\vec{e}_z\cdot d\vec{r}$$

$$= \int_1^2 -mg\,dz = -mgz\,\Big|_1^2 = mgz_1 - mgz_2$$



- Le travail ne dépend que des coordonnées z_1 et z_2 des points 1 et 2 ; il ne dépend pas de la trajectoire suivie entre ces deux points

- Le travail de la force de pesanteur est nul le long d'une trajectoire fermée quelconque:

$$W_{1\to2\to1} = \int_1^2 m\vec{g}\cdot d\vec{r} + \int_2^1 m\vec{g}\cdot d\vec{r} = mg(z_1 - z_2) + mg(z_2 - z_1) = 0$$

- On écrit: $\oint \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$

démo: travail dans champs gravitationnel-635

4.4 Ex.: chute d’un point matériel

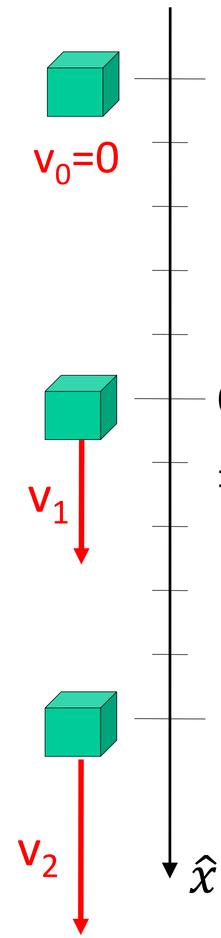
$$\vec{F} = -\begin{pmatrix} \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial x} \\ \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial y} \\ \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial z} \end{pmatrix} = -\vec{\nabla} V(\vec{r})$$

$$mg\vec{e}_x = \begin{pmatrix} mg \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{mg\partial(x_0 - x)}{\partial x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow V(\vec{r}) = \begin{pmatrix} mg(x_0 - x) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$V(x_0) + K_0 = V(x_2) + K_2$$ Conservation énergie

$$V(x_0) = mg(x_0 - x_0) = 0$$
$$K_0 = \frac{1}{2} m v_0^2 = 0$$
$$\Rightarrow \quad 0 = -mgx_2 + \frac{1}{2} m v_2^2$$

$$mgx_2 = \frac{1}{2} m v_2^2 = \frac{1}{2} m (gt_2)^2 \quad \Rightarrow \quad g = \frac{2x_2}{t_2^2}$$



0.0 m = x_0 au temps $t_0 = 0$

$$\Rightarrow \quad x(t) = \frac{1}{2} g t^2$$

0.5 m = x_1 au temps t_1

$$\Rightarrow \quad g = \frac{2x_1}{t_1^2}$$

1.0 m = x_2 au temps t_2

$$\Rightarrow \quad g = \frac{2x_2}{t_2^2}$$

On retrouve l’expression pour g sans utiliser la 2eme loi de Newton